Mathematik-Prüfungstraining

4. Thema: Integrale

1. Das bestimmte Integral – Definition (Flächenbilanz)

$\int_a^b f(x)\,dx$ ist die Summe der Flächenstücke zwischen x-Achse und G_f im Intervall $[a; b]$, wobei die Flächenstücke oberhalb der x-Achse positiv und die unterhalb der x-Achse negativ gezählt werden.

2. Integrationsregeln

a) Integrationsgrenzen: Vertauschung der Integrationsgrenzen: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
Gleiche Integrationsgrenzen: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
Aufteilung des Integrationsintervalls: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

b) Summe / Differenz von Funktionen: $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

c) Konstanter Faktor: $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

d) Keine Produkt- / Quotientenregel! $\int_a^b \big(f(x) \cdot g(x)\big)\,dx$ und $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ lassen sich meist nicht weiter umformen

3. Zusammenhang mit Stammfunktion

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

4. Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung $F'(x)$ die Funktion $f(x)$ ist, heißt Stammfunktion von $f(x)$.

Zu einer Funktion $f(x)$ gibt es unendlich viele Stammfunktionen, die sich jeweils um eine additive Konstante unterscheiden, denn bei der Ableitung fällt diese Konstante weg.

5. Unbestimmtes Integral

Lediglich andere Schreibweise, um Zugehörigkeit von Funktion / Stammfunktion zu verdeutlichen:
Anstatt $f(x) = \cdots$ ⇨ $F(x) = \cdots$ können wir schreiben $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$\int f(x)\,dx$ ergibt keine *einzelne* Funktion, sondern die *Menge aller möglichen Stammfunktionen*

6. Integralfunktion

$I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$ ($F(a)$ ist eine Konstante!)

I_a ist also eine Stammfunktion von $f(x)$. Aber nicht irgendeine Stammfunktion! Da $I_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ ist die Integralfunktion zu f gerade diejenige Stammfunktion von f, die bei a eine Nullstelle hat. Diese Funktion ist *eindeutig*, es gibt nur *eine einzige* Stammfunktion von f mit dieser Eigenschaft; die Konstante C, die bei der Stammfunktion jeden beliebigen Wert haben kann, muss so gewählt werden, dass $I_a(a) = 0$ gilt.

7. HDI (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$I_a{}'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$ oder $\int_a^x f'(t)\,dt = [f(x)]_a^x = f(x) - f(a)$ ($f(a)$ ist eine Konstante!)
(Integration und Differentiation sind zueinander Umkehrungen)

Es gibt weder das Verb „aufleiten" (es heißt „integrieren" oder „Stammfunktion bilden/finden") noch das Substantiv „Aufleitung" (es heißt „Stammfunktion" oder „Integralfunktion", wobei es einen Unterschied zwischen beiden gibt → 6)

8. Skizzieren der Stammfunktion

- NS von G_f ⇨ HOP/TIP/TEP von G_F (abhängig vom Vorzeichenverhalten von f)
- HOP/TIP von G_f ⇨ maximale/minimale Steigung von G_F ⇨ Wendepunkt von G_F
- Die Lage von G_F relativ zur y-Achse (und damit die NS von G_F) lässt sich NICHT aus G_f ablesen!

9. „Tricks" zum Auflösen komplizierterer Integrale

a) Verkettung mit linearen Funktionen: $\int_a^b f(mx+t)\,dx = \left[\frac{1}{m}F(mx+t)\right]_a^b$

b) Brüche mit Ableitung des Nenners im Zähler: $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = [\,\ln|f(x)|\,]_a^b$

10. Stammfunktionen zu bestimmten Funktionen

a) Potenzfunktionen / Wurzelfunktionen: $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

$f(x) = c = c \cdot x^0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = c \cdot x^1 + C = c \cdot x + C$

$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$

$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad (n > 1) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + C = \frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C$

Ausnahme: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln|x| + C$

$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\frac{1}{n}+1}x^{\frac{1}{n}+1} + C = \frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}} + C$

$f(x) = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = x^{\frac{p}{q}} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\frac{p}{q}+1}x^{\frac{p}{q}+1} + C = \frac{q}{p+q}x^{\frac{p+q}{q}} + C$

b) Ganzrationale Funktionen (Polynome)

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \dots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + C$

c) Exponentialfunktionen

$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad F(x) = e^x + C$

$f(x) = e^{kx} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + C$ / insbesondere $f(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = -e^{-x} + C$

$f(x) = e^{mx+t} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{m} \cdot e^{mx+t} + C$ (siehe 9a)

$f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\ln a}e^{x \ln a} + C = \frac{1}{\ln a}a^x + C$ ($\frac{1}{\ln a}$ ist eine Konstante)

d) Logarithmen

$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad F(x) = x \cdot \ln x - x + C$

$f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\ln a}(x \cdot \ln x - x) + C$ ($\frac{1}{\ln a}$ ist eine Konstante)

e) Trigonometrische Funktionen

$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\cos x + C$

$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \sin x + C$

$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\ln|\cos x| + C$ (siehe 9b)

f) Gebrochenrationale Funktionen: keine einfache Regel! Ggf. machbar nach Polynomdivision

11. Flächenbilanz / Flächeninhalt / Flächeninhalt zwischen zwei Graphen

Siehe 1. – um den gesamten Flächeninhalt positiv zu zählen, muss man den Integrationsbereich an den Nullstellen der Integrandenfunktion in mehrere Intervalle teilen und jeweils die Beträge der zugehörigen Integrale addieren.

Um den Flächeninhalt zwischen den Graphen zweier Funktionen f und g zu berechnen, bildet man die Differenzfunktion $f - g$ und berechnet (s.o.) den Flächeninhalt zwischen dieser Funktion und der x-Achse.

11. Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale sind bestimmte Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$, bei denen entweder

- eine oder beide der Integrationsgrenzen a, b im Unendlichen liegen oder
- die Integrandenfunktion $f(x)$ an der Stelle a oder b (oder beiden) eine Polstelle besitzt

und die trotzdem einen endlichen Wert haben. Die Funktion $f(x)$ „schmiegt sich" also schnell genug an die x-Achse bzw. die senkrechte Asymptote an, dass der Flächeninhalt endlich bleibt. Am Graphen „sehen" kann man dies nicht; allerdings findet man durch Grenzwertberechnung heraus, dass sich $\frac{1}{x^r}$ für $r > 1$ an die x-Achse schnell genug anschmiegt, aber nicht an y, für $r > 1$ ist es umgekehrt, und für $r = 1$ schmiegt es sich an keine Asymptote schnell genug an.

Den Wert des Integrals berechnet man, indem man zunächst anstelle der betroffenen Integrationsgrenze eine Variable z verwendet und anschließend den Grenzwertübergang $z \to a$ oder $z \to b$ macht.

Übungsaufgaben im Netz

4. Thema: Integrale

Übungsaufgaben mit Lösungen auf http://www.raschweb.de:

- Mathe 12: Streifenmethode, Integralrechnung Aufgabenblatt 1 & 2, Graphen von Integralfunktionen 1 & 2, Flächenberechnungen, gemischte Aufgaben zur Integralrechnung, Aufgaben zur Integralrechnung, uneigentliche Integrale und zweite Ableitung

Wachhalten/Diagnostizieren-Aufgaben mit Lösungen
auf http://lehrerfortbildung-bw.de/faecher/mathematik/gym/fb1/modul4/basis/:

- Kursstufe: Seiten 19-21

Übungsaufgaben mit schrittweiser Hilfestellung und sofortiger Korrektur auf http://www.mathegym.de:

Rechenregeln in Videoform erklärt, mit kleinen Zwischenfragen (Vorlesung zur Vorbereitung aufs Mathestudium, behandelt aber elementaren Schulstoff recht anschaulich und ausführlich): http://capira42.appspot.com

